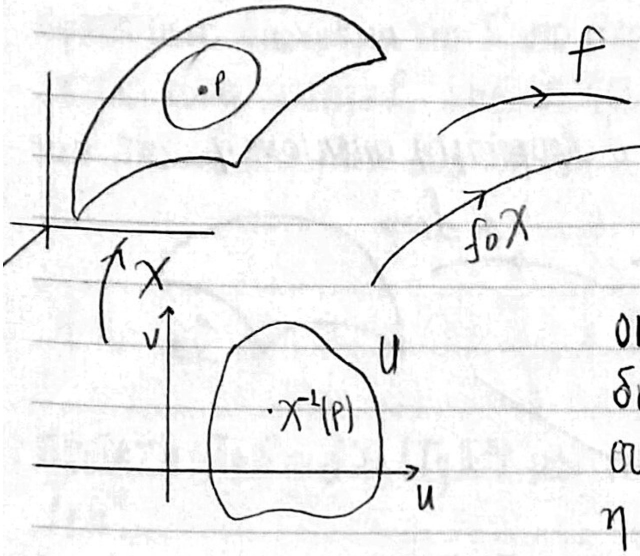
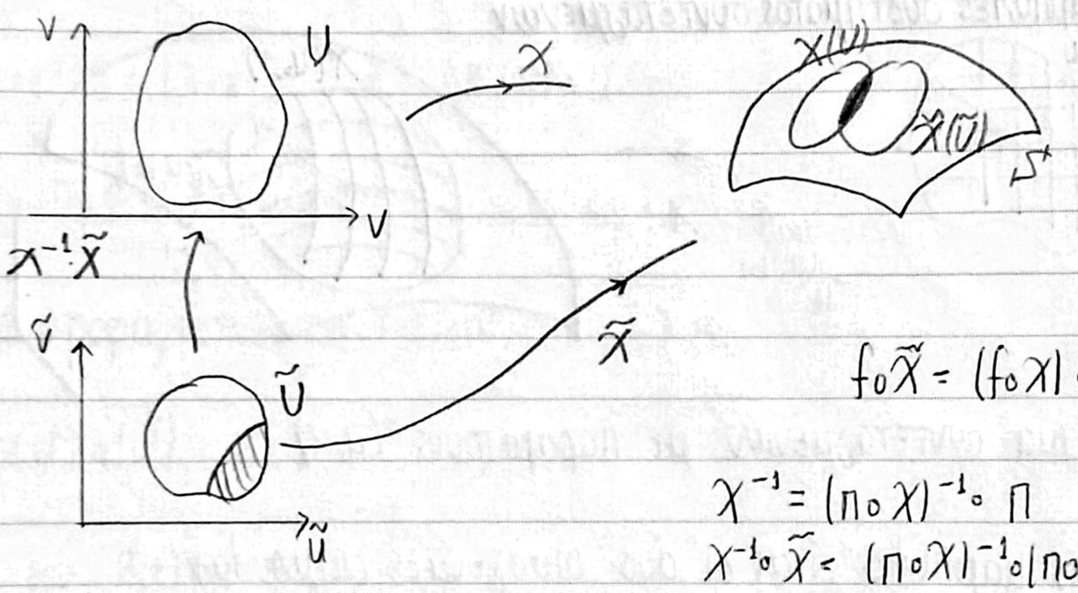
Μάθημα 12ο 18/11/16



ΟΡΙΣΜΟΣ: Η συνάρτηση $f: S \to \mathbb{R}$ καλείται διαφορίσιμη στο $p \in S$ αν για κάποιο σύστημα συντεταγμένων $X: V \to X(V) \subset S$ με $p \in X(U)$ η $f \circ X: V \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $X^{-1}(p)$

Η f καλείται διαφορική ανν είναι διαφορίσιμη σε κάθε $p \in S$

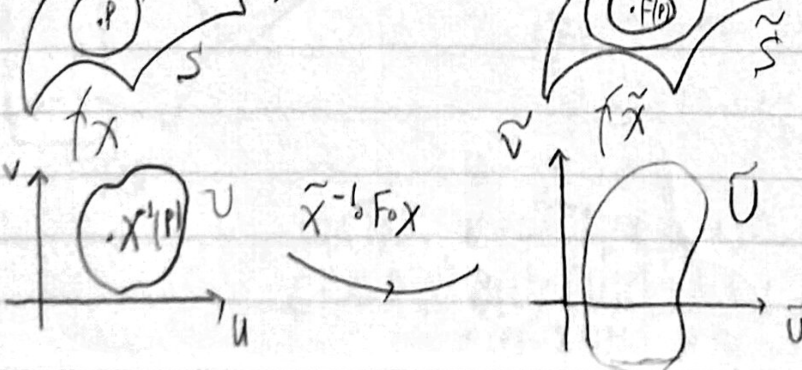


$$f \circ \tilde{X} = (f \circ X) \circ (X^{-1} \circ \tilde{X})$$

$$X^{-1} = (\Pi \circ X)^{-1} \circ \Pi$$

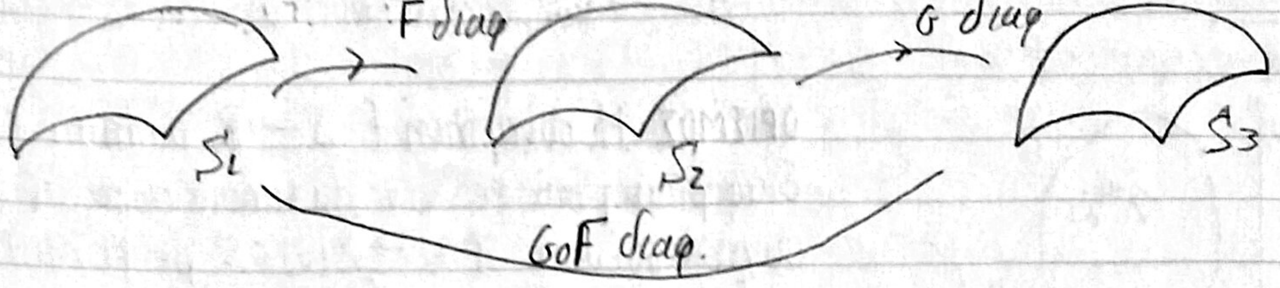
$$X^{-1} \circ \tilde{X} = (\Pi \circ X)^{-1} \circ (\Pi \circ \tilde{X})$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $F: S \to \tilde{S}$, $S, \tilde{S}$ κανονικές επιφάνειες. Η F καλείται διαφορίσιμη στο $p \in S$ ανν για συστήματα συντεταγμένων $X: V \to S$ με $p \in X(U)$ $\tilde{X}: \tilde{U} \to \tilde{S}$, με $F(p) \in \tilde{X}(\tilde{U})$, $F(X(U)) \subset \tilde{X}(\tilde{U})$ η $\tilde{X}^{-1} \circ F \circ X$ είναι διαφορίσιμη στο $X^{-1}(p)$



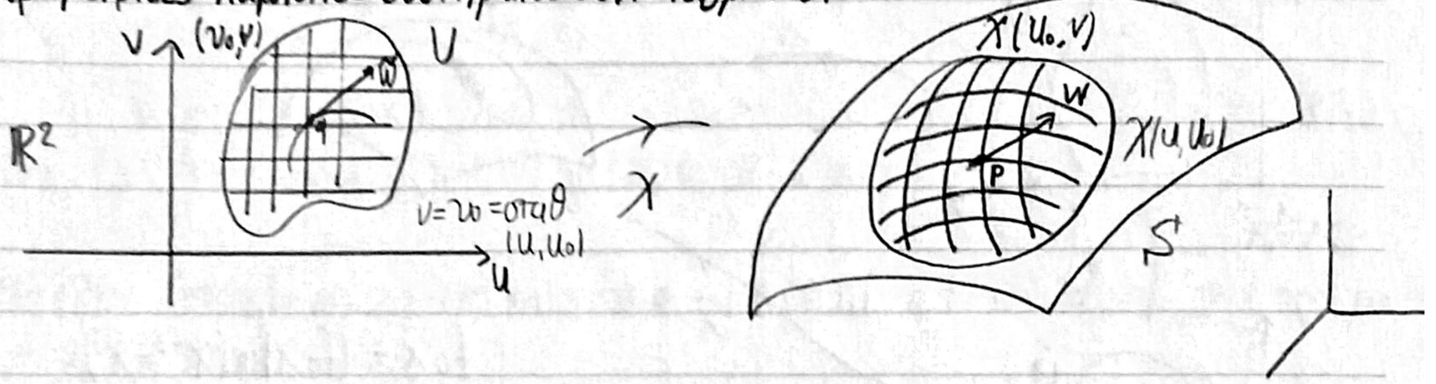
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: 1) $F: V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμη και $S \subset V$, τότε $F|_S : S \to \mathbb{R}^3$ είναι διαφορίσιμη

2) Σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων είναι διαφορίσιμη απεικόνιση



3) $X: U \to S$ διαφορομορφισμός

Παραμετρικές καμπύλες συστήματος συντεταγμένων

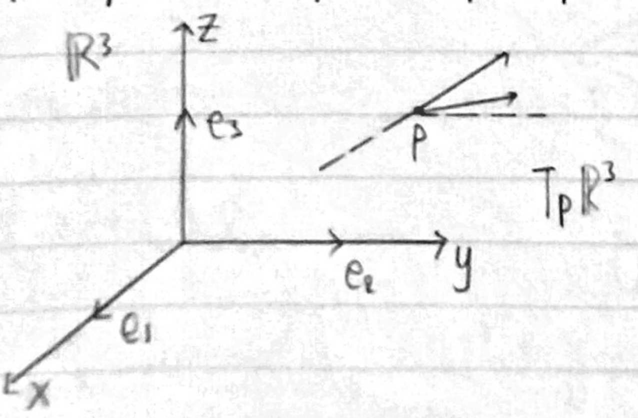


$X: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων με παράμετρους (u, v)

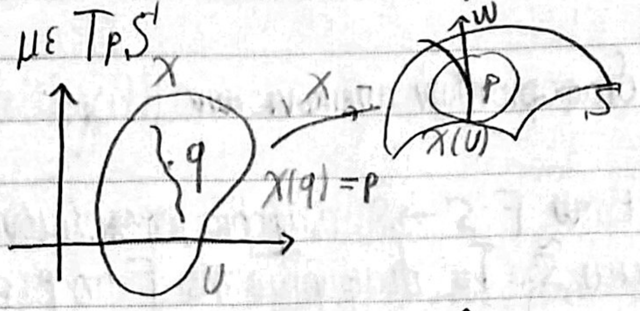
Οι παραμετρικές καμπύλες είναι οι δύο οικογένειες καμπυλών

$$\begin{cases} X(u, v = v_0) & \text{έχω διάνυσμα ταχύτητας το } X_u \\ X(u = u_0, v) & \text{—''— —''— } X_v \end{cases}$$

Εφαπτόμενα διανύσματα – Εφαπτόμενο επίπεδο



ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω S κανονική επιφάνεια και $p \in S$. Το διάνυσμα $w \in T_p\mathbb{R}^3$ καλείται εφαπτόμενο διάνυσμα της S στο σημείο p αννν υπάρχει καμπύλη $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ τέτοια ώστε $c(0) = p$ με $c'(0) = w$. Το σύνολο των εφαπτομένων διανυσμάτων της S στο $p \in S$ συμβολίζεται με T_pS.



ΠΡΟΤΑΣΗ: $T_pS = dX_q(T_q\mathbb{R}^2)$ και επομένως το T_pS είναι 2-διάστατος υπόχωρος του $T_p\mathbb{R}^3$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $w \in T_pS$, $\exists c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με $c(0) = p$ και $c'(0) = w$, $c(-\varepsilon, \varepsilon) \subset X(U)$

$c(t) = X(u(t), v(t))$, $\beta(t) = (u(t), v(t))$

$w = c'(0) = (X \circ \beta)'(0) = dX_{\beta(0)}(\beta'(0)) = dX_q(\beta'(0))$

Άρα $T_pS \subseteq dX_q(T_q\mathbb{R}^2)$.

Αντίστροφα, έστω $w \in dX_q(T_q\mathbb{R}^2)$.

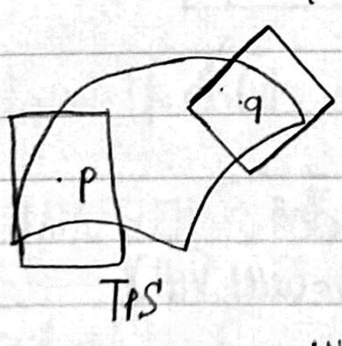
$w = dX_q(\tilde{w})$, $\tilde{w} \in T_q\mathbb{R}^2$

Θεωρώ $\beta(t) = q + t\tilde{w}$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\beta(0) = q$ $\quad \beta'(0) = \tilde{w}$

$w = dX_q(\tilde{w}) = dX_q(\beta'(0)) = (X \circ \beta)'(0) = c'(0)$, $c = X \circ \beta$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ο υπόχωρος T_pS καλείται εφαπτόμενο επίπεδο της S στο σημείο της p



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $\{X_u(q), X_v(q)\}$ είναι βάση του T_pS, $p = X(q)$

$w \in T_pS$, $w = c'(0)$, $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ $\quad c(0) = p$

$c = X \circ \beta$, $\beta(t) = (u(t), v(t))$, $\beta(0) = q$

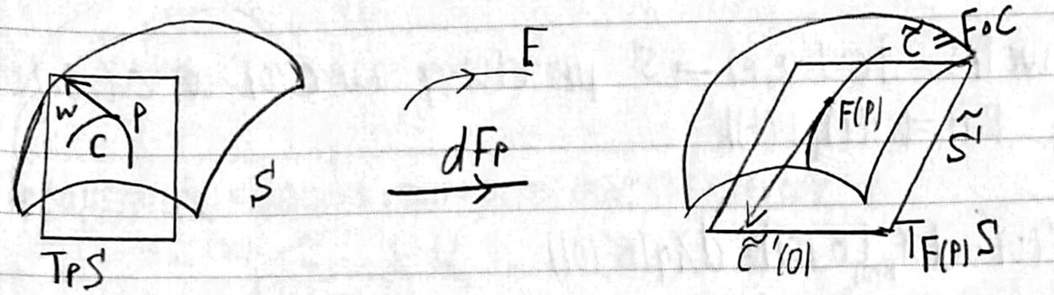
$c(t) = X(u(t), v(t))$

$c'(0) \overset{\text{κανόνας αλυσ.}}{=} u'(0)\, x_u(u(0), v(0)) + v'(0)\, x_v(u(0), v(0))$

$w = u'(0)\, x_u(q) + v'(0)\, x_v(q)$

Διαφορικό διαφορίσιμων απεικονίσεων

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $F: S \to \tilde{S}$ διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ των κανονικών επιφανειών S και $\tilde{S}$. Το διαφορικό της F στο p είναι η απεικόνιση



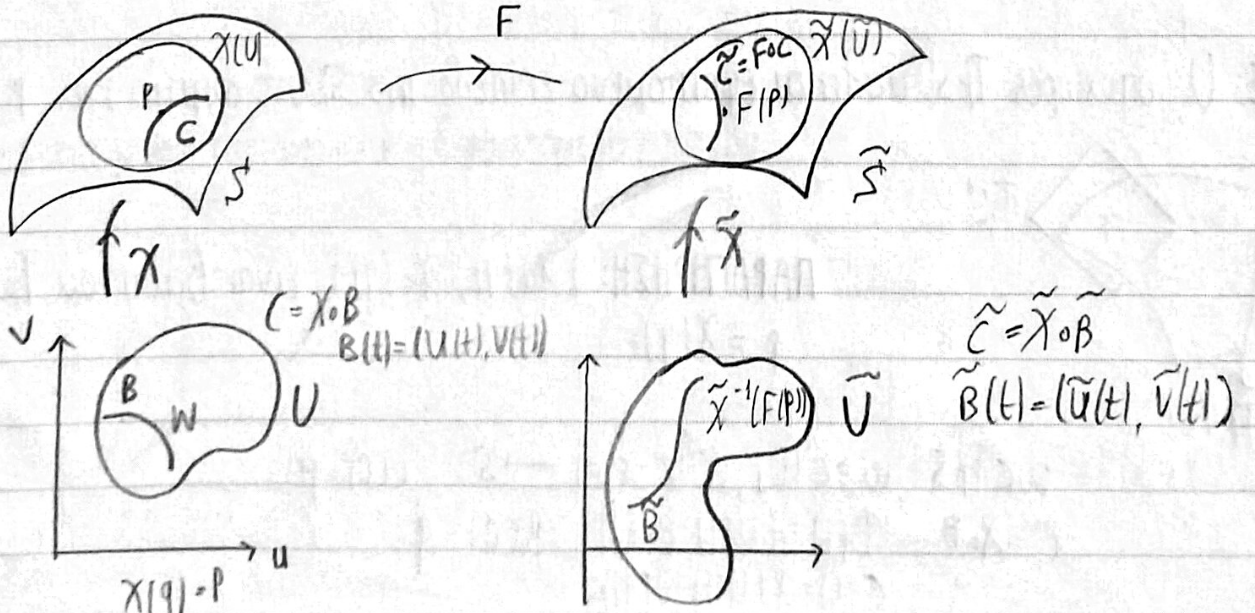
$dF_p: T_pS \to T_{F(p)}\tilde{S}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$w \in T_pS$, Υπάρχει $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με $c(0) = p$ και $c'(0) = w$.

Θεωρώ την $\tilde{c} = F \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \tilde{S}$, $\tilde{c}(0) = F(p)$

$dF_p(w) := \tilde{c}'(0)$

Πρέπει να δειχθεί ότι το $dF_p(w)$ είναι ανεξάρτητο της c.



$\tilde{c} = F\circ c \Leftrightarrow \tilde{\chi}\circ\tilde{\beta} = F\circ\chi\circ\beta \Leftrightarrow \tilde{\beta} = \underbrace{(\tilde{\chi}^{-1}\circ F\circ\chi)}_{\varphi := \tilde{\chi}^{-1}\circ F\circ\chi}\circ\beta$

$\varphi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))$ λεία

$\tilde{\beta}(t) = \varphi(\beta(t)) \Leftrightarrow (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = \varphi(u(t), v(t)) = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t)))$

$w = u'(0)\cdot\chi_u(q) + v'(0)\chi_v(q)$
$\tilde{c}'(0) = \tilde{u}'(0)\tilde{\chi}_u(\cdot\cdot) + \tilde{v}'(0)\tilde{\chi}_v(\cdot\cdot)$

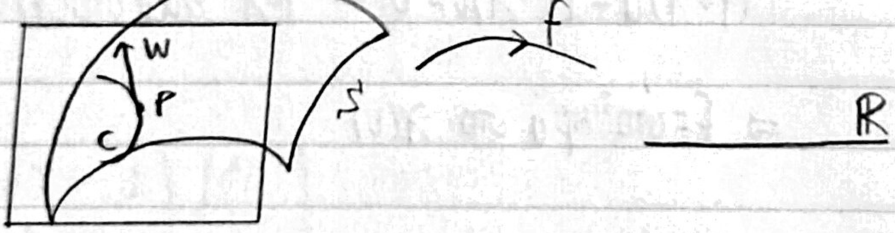
$\Rightarrow (\tilde{u}'(0), \tilde{v}'(0)) = \left(u'(0)\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(\cdot\cdot) + v'(0)\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(\cdot\cdot), u'(0)\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(\cdot\cdot) + v'(0)\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\right.$

$$\tilde{u}'(0) = u'(0)\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(\cdot\cdot) + v'(0)\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(\cdot\cdot)$$
$$\tilde{v}'(0) = u'(0)\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(\cdot\cdot) + v'(0)\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(\cdot\cdot)$$

Συμπέρασμα: Το $dF_p : T_pS \to T_{F(p)}\tilde{S}$ είναι καλώς ορισμένο και γραμμική απεικόνιση

Διαφορικό διαφορίσιμων συναρτήσεων

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $f: S \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση, S κανονική επιφάνεια. Καλούμε διαφορικό της f στο p την απεικόνιση $df_p : T_pS \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής: $w \in T_pS$, $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με $c(0) = p$, $c'(0) = w$

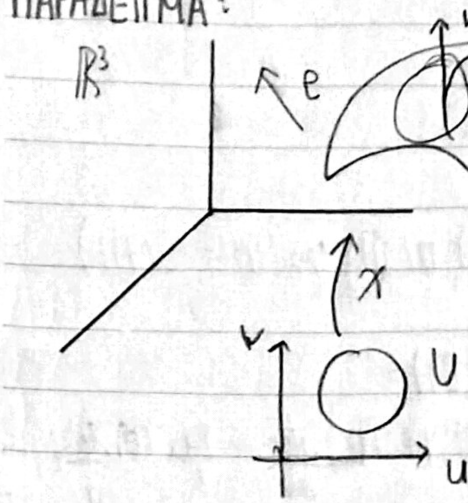


$df_p(w) = (f\circ c)'(0)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το $df_p : T_pS \to \mathbb{R}$ είναι καλώς ορισμένο και γραμμ. απεικόνιση.

$F: S \to \mathbb{R}^3$ διαφ. $F = (f_1, f_2, f_3)$
Το διαφορικό της F στο $p \in S$ είναι η απεικόνιση: $dF_p : T_pS \to T_{F(p)}\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^3$
$dF_p = (df_{1p}, df_{2p}, df_{3p})$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



Εστω S κανονική επιφάνεια και e μοναδιαίο διάνυσμα. Θεωρώ την συνάρτηση $f: S \to \mathbb{R}$

$f(p) = \langle p, e \rangle$

$f \circ X: U \to \mathbb{R}$, $f \circ X = \langle X, e \rangle$, λεία

$df_p: T_pS \to \mathbb{R}$, $w \in T_pS$, $c(-\varepsilon, \varepsilon) \to S$

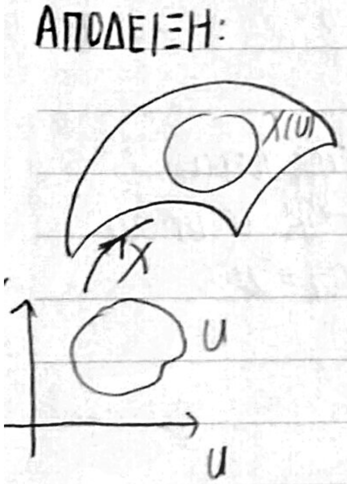
με $c(0) = p$, $c'(0) = w$, $df_p(w) = (f \circ c)'(0)$

$$f \circ c(t) = f(c(t)) = \langle c(t), e \rangle \Rightarrow (f \circ c)'(0) = \langle c'(0), e \rangle = \langle w, e \rangle$$

$$df_p(w) = \langle w, e \rangle$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω S κανονική συνεκτική επιφάνεια και $f: S \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη. Αν $df_p = 0$, $\forall p \in S$, τότε η f είναι σταθερά.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

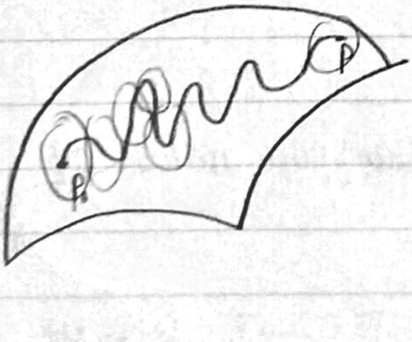


Έστω $X: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων με U συνεκτικό.

$$df(X_u) = 0 = df(X_v) \Rightarrow$$

$$(f \circ X)_u = (f \circ X)_v = 0. \Rightarrow f \circ X \text{ είναι σταθερά στο } U$$

$$\Rightarrow f = \text{σταθερά στο } X(U)$$



$c: [0,1] \to S$ συνεχής με $c(0) = p$, $c(1) = p$

$\forall t \in [0,1]$ υπάρχει ανοικτό $V(t)$ της S που περιέχει το $c(t)$ ώστε $f|_{V(t)} =$ σταθερά

$$c([0,1]) = \bigcup_{t \in [0,1]} V(t) \Rightarrow c([0,1]) \subset V(t_0) \cup V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n)$$

Παραμετρικές επιφάνειες

ΟΡΙΣΜΟΣ: Καλούμε παραμετρική επιφάνεια κάθε λεία απεικόνιση $X: U\subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(u,v) \longmapsto X(u,v)$

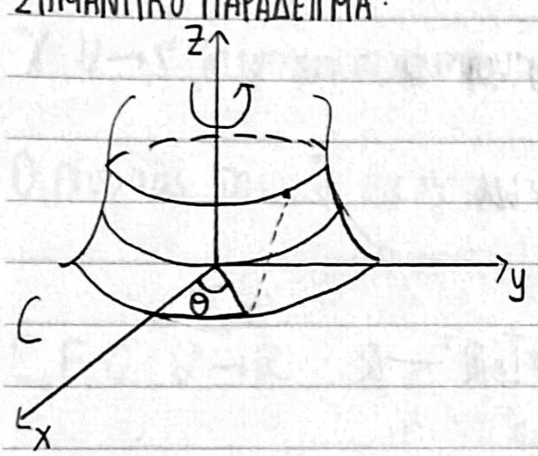
Η X καλείται κανονική παραμετρική επιφάνεια ανν το dX_q είναι "1-1", $\forall q\in U$
(ή ισοδύναμα $X_u \times X_v \neq 0$)

$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (x, y, z(u(x,y), v(x,y)))$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0 \quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{matrix}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $X: U \to \mathbb{R}^3$ κανονική παραμετρική επιφάνεια τότε $\forall q_0 \in U$, υπάρχει ανοικτό $V_0 \subseteq U$ με $q_0 \in U$ τότε το $X(V_0)$ είναι κανονική επιφάνεια.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



Έστω $C: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη με $C(t) = (f(t), 0, g(t))$

Θεωρώ την παραμετρική επιφάνεια
$X: I\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$X(t,\theta) = (f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t))$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Η X καλείται επ. περιστροφής επιφάνεια.
Είναι κανονική παραμετρική επιφάνεια;
$X_t = (f'(t)\cos\theta, f'(t)\sin\theta, g'(t))$
$X_\theta = (-f(t)\sin\theta, f(t)\cos\theta, 0)$

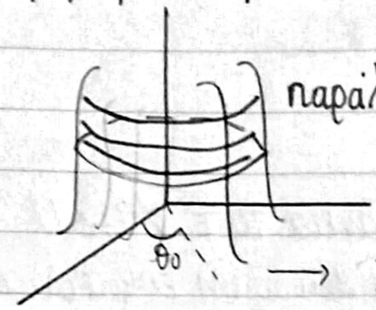
$$X_t \times X_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ f'(t)\cos\theta & f'(t)\sin\theta & f'(t) \\ -f(t)\sin\theta & f(t)\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-f(t)g'(t)\cos\theta, -f(t)g'(t)\sin\theta, f(t)f'(t))$$

$$\|X_t \times X_\theta\|^2 = f^2(t)\left((f'(t))^2 + [g'(t)]^2\right)$$

Απαιτήσεις:

1) C κανονική, δηλ. $(f')^2 + (g')^2 > 0$
2) Η C να μην τέμνει το Oz, π.χ. $f > 0$ ή $f < 0$.

Παραμετρικές καμπύλες

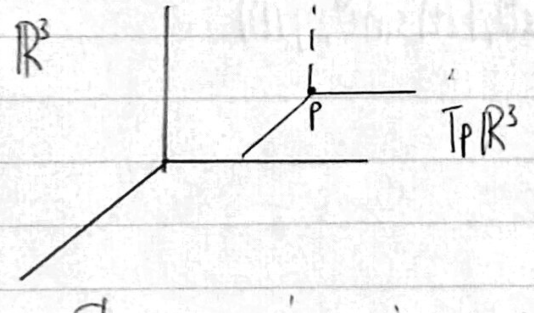


παράλληλοι   κάθε παράλληλη πάντα κάθετος σε κάθε μεσημβρ

$\longrightarrow X(t, \theta=\theta_0)$ μεσημβρινοί

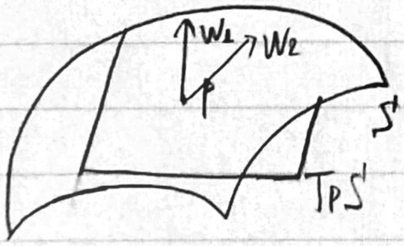
$\mathbb{R}^3$; $<,>: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ σύνηθες εσωτερικό γινόμενο

$V = (V_1, V_2, V_3)$
$W = (W_1, W_2, W_3)$
$<V, W> = V_1W_1 + V_2W_2 + V_3W_3$



$<,>_p : T_p\mathbb{R}^3 \times T_p\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

Έστω S κανονική επιφάνεια, $p \in S$



Θεωρώ το εσωτερικό γινόμενο $<,>_p: T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ το οποίο είναι ο περιορισμός του συνήθους εσωτερικού γινομένου του $\mathbb{R}^3$

$$\|W_1 + W_2\|^2 = \|W_1\|^2 + \|W_2\|^2 + 2<W_1, W_2>_p$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Καλούμε 1η Θεμελιώδη μορφή της κανονικής S στο σημείο της P, την αντίστοιχη τετραγωνική μορφή του εσωτερικού γινομένου $\langle\,,\,\rangle_P : T_PS \times T_PS \to \mathbb{R}$, δηλαδή η πρώτη θεμελιώδης μορφή της S στο P είναι η:
$I_P : T_PS \to \mathbb{R}$, $I_P(W) = \langle W, W\rangle_P = \|W\|^2$

$\forall W_1, W_2 \in T_PS$, $I_P(W_1+W_2) = I_P(W_1) + I_P(W_2) + 2\langle W_1, W_2\rangle_P$.

$$\langle W_1, W_2\rangle_P = \frac{1}{2}\left\{ I_P(W_1+W_2) - I_P(W_1) - I_P(W_2)\right\}$$

$W \in T_PS$, μήκος του W, $\|W\| = \sqrt{\langle W, W\rangle_P} = \sqrt{I_P(W)}$

$W_1, W_2 \in T_PS \setminus \{0\}$. Η γωνία τους είναι $\cos\theta = \dfrac{\langle W_1, W_2\rangle_P}{\|W_1\|\|W_2\|} = \dfrac{\langle W_1, W_2\rangle}{\sqrt{I_P(W_1)}\sqrt{I_P(W_2)}}$

$C : I \to S$. Μήκος της C: $L_a^b(C) = \int_a^b \|C'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{I_{C(t)}(C'(t))}\,dt$

$X : U \to S$ σύστημα συντεταγμένων $\{X_u(q), X_v(q)\}$, $q = X^{-1}(P)$ βάση της T_PS

Ο πίνακας της I_P ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$ είναι $\begin{pmatrix} \langle X_u, X_u\rangle_P & \langle X_u, X_v\rangle_P \\ \langle X_v, X_u\rangle_P & \langle X_v, X_v\rangle_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

$E, F, G : U \to \mathbb{R}$, $E = \langle X_u, X_u\rangle = \|X_u\|^2$
$F = \langle X_u, X_v\rangle$
$G = \langle X_v, X_v\rangle = \|X_v\|^2$

Θεμελιώδη ποσά 1ης τάξης ως προς το X.